Софийски Университет
„Свети Климент Охридски“

Факултет по математика и информатика

Росен Асенов Николов

Оценки на разстоянието на Банах-Мазур чрез модули на изпъкналост и гладкост

Автореферат на дисертация за придобиване на ОНС „доктор“
Научно направление: 4.5 Математика
Докторска програма: „Математически анализ“

Научни ръководители:
акад. Станимир Троянски
доц. д-р Владимир Бабев

София, 2017

Дисертацията е разгледана и предложена за публична защита на заседание на катедра „Математически анализ“ - протокол №7/2017 от 30 август 2017 година.

Общо описание

Дисертацията е от 37 стандартни страници. Изложението е базирано на авторовите статии [16] и [17].

Дисертацията се състои от предговор, две глави и списък на литературата, съдържащ 17 заглавия, включително цитираните по-горе.

В предговора са приведени основните дефиниции и означения. Накратко са разгледани известните резултати, водещи до въпросите, разглеждани в дисертацията.

Апробация

Резултатите в дисертацията са докладвани на

- Пролетна научна сесия на ФМИ 2016 , доклад на тема „Върху едно диференциално неравенство“.

- Пролетна научна сесия на ФМИ 2017, доклад на тема „Върху една геометрична характеризация на Банаховите пространства с модул на изпъкналост от степенен тип 2“.

Описание на резултатите

Основните задачи, решавани в дисертацията са изследването на модула на изпъкналост и модула на гладкост на някои (двумерни) Банахови пространства.

Нека X е Банахово пространство.

Дефиниция 1.1 *Функцията*

$$\delta_X(\varepsilon) := \inf\left\{1 - \left\|\frac{x+y}{2}\right\| : \ \|x\| = \|y\| = 1, \ \|x-y\| = \varepsilon\right\} ,$$

където $0 \le \varepsilon \le 2$, *наричаме модул на изпъкналост на* X.

Дефиниция 1.2 *Функцията*

$$\rho_X(\tau) := \sup\left\{\frac{\|x+\tau y\| + \|x-\tau y\| - 2}{2} : \ \|x\| = \|y\| = 1\right\} ,$$

където $\tau \ge 0$, *наричаме модул на гладкост на* X.

С някои изключения, явното им пресмятане за конкретно пространство е свързано с големи трудности. Хилбертовите пространства са едно от тези изключения. Според теоремата на Нордландер [13], те се оказват „най-изпъкнали“, респективно „най-гладки“, сред пространствата на Банах. Именно, ако H е Хилбертово, то за всяко Банахово пространство X са изпълнени следните неравенства :

$$\delta_X(\varepsilon) \le \delta_H(\varepsilon) = 1 - \sqrt{1 - \frac{\varepsilon^2}{4}} = \frac{\varepsilon^2}{8} + O(\varepsilon^4)$$

и

$$\rho_X(\tau) \ge \rho_H(\tau) = \sqrt{1+\tau^2} - 1 = \frac{\tau^2}{2} + O(\tau^4) .$$

Във връзка с горното в дисертацията се пресмята и разстоянието на Банах-Мазур между изследваните пространства и $l_2^{(2)}$.

Дефиниция 1.3 *Нека* Y *и* Z *са две изоморфни Банахови пространства. Тогава* $d(Y,Z) = \inf \|T\|.\|T^{-1}\|$, *където* $\inf$ *е взет по всички изоморфизми* $T : Y \to Z$, *наричаме (мултипликативно) разстояние на Банах-Мазур между* Y *и* Z.

Ясно е, че $d(Y,Z) \ge 1$ и $d(X,Z) \le d(X,Y)d(Y,Z)$.

За Банахово пространство X се дефинира и следната характеристика:
$d_2(X) = \sup\{d(Y, l_2^{(2)})\}$, където $\sup$ се взема по всички двумерни подпространства Y на X, а $l_2^{(2)}$ означава двумерното Хилбертово пространство, с други думи — Евклидовата равнина. Разбира се $d_2(X) \ge 1$.

Глава 1

В първа глава се изследват двумерни пространства от класа $\mathcal{X}_a$, състоящ се от всички Банахови пространства X, за които

$$\rho_X(\tau) = \frac{1+a}{2}\,\tau^2 + o(\tau^2)\ .$$

Основна роля играят функциите

$$r_Y(\sigma) = \|e_1\cos\sigma + e_2\sin\sigma\|_Y\ ,$$

свързаните с тях са два класа от функции. За $a \geq 0$ с G_a означаваме класа на всички π-периодични функции $R = R(\theta)$ такива че

(I) $0 < R(\theta) \leq 1\,,\ R(0) = R\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 1\,.$

(II) За почти всички θ съществува $R''(\theta)$ и $0 \leq R(\theta)\left(R(\theta) + R''(\theta)\right) \leq 1 + a\ .$

Функциите от класа $F_a \subset G_a$ удовлетворяват и условието

(III) $\displaystyle\sup_{\varphi,\theta} \frac{\sin^2(\varphi-\theta)}{R^2(\varphi)} R(\theta)\left(R(\theta) + R''(\theta)\right) = 1 + a\ .$

Иванов и Троянски [4] доказват, че за двумерно $Y \in \mathcal{X}_a$, чиято сфера на Джон е Евклидовия кръг, е изпълнено $r_Y \in F_a$. При оценяване на $d_2(X)$ за $X \in \mathcal{X}_a$, на практика, се използва само условието $r_Y \in G_a$, по-точно sup в (III) се пресмята само за $|\theta - \varphi| = \dfrac{\pi}{2}$. Това, разбира се, не винаги може да се предполага.

Пространствата, разглеждани в тази глава, удовлетворяват „по-силна“ оценка от цитираната оценка, въпреки, че за някои от тях sup в (III) се постига за точки, в които $r_Y' = 0$, а за други от тях – в точки, за които $r_Y' \neq 0$, както показва следващата теорема и нейното следствие.

Теорема 2.1 *За всяко* $0 < a$ *има двумерно* $X_a \in \mathcal{X}_a$*, като пространствата* X_a *удовлетворяват условията:*

1. $r_{X_a} \in F_a$ *за всяко* $0 < a$.
2. $d_2\left(X_a\right) < d_2\left(X_b\right)$ *за* $0 < a < b$.
3. *За всяко* $0 < a$ *има* $b > a$*, за което* $r_{X_b} \in G_a \setminus F_a$.

Доказателството на теорема 2.1 се състои в изследване на двумерното пространство Y_λ . Нормата в него задаваме чрез посочване на единичния му кръг $B_{(\lambda)}$.

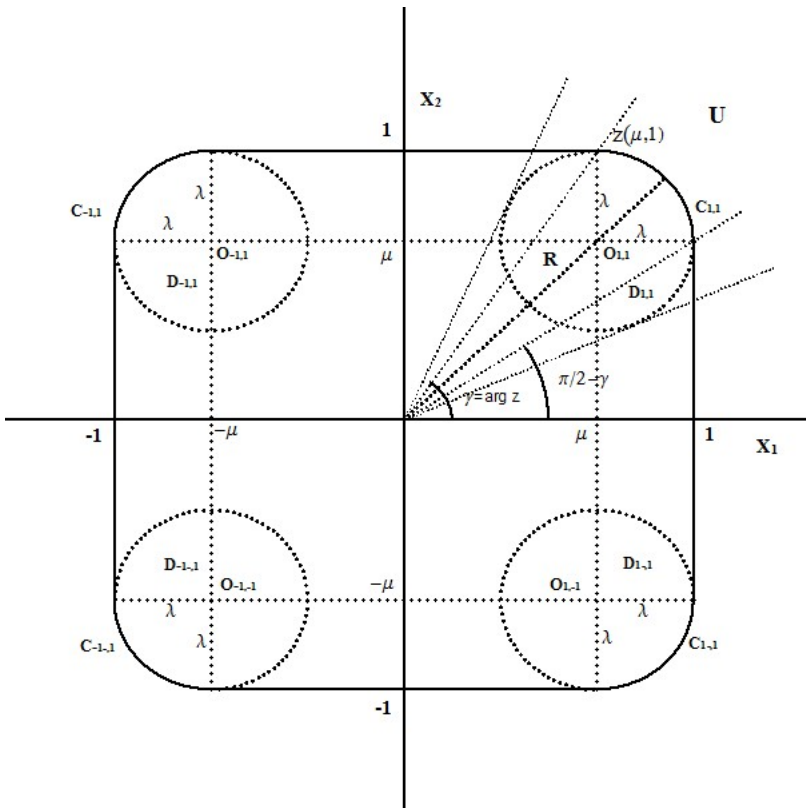
Нека $\lambda \in [0,1]$, $\mu = 1-\lambda$ и

$$C_{\iota_1,\iota_2} = \left\{ (x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2 \,:\, (x_1 - \iota_1\mu)^2 + (x_2 - \iota_2\mu)^2 = \lambda^2 \right\} \quad \text{за} \quad \iota_1 = \pm 1,\ \iota_2 = \pm 1 \ .$$

Полагаме

$$B_{(\lambda)} = \operatorname{conv}\left\{ C_{1,1} \cup C_{1,-1} \cup C_{-1,1} \cup C_{-1,-1} \right\} \quad \text{за} \quad \|x\|_{(\lambda)} = \inf\left\{ t>0 \,:\, \frac{x}{t} \in B_{(\lambda)} \right\} \ .$$

Функционалът на Минковски ни дава нормата, която по-нататък изследваме. Фигура 2.1 илюстрира $B_{(\lambda)}$ и $S_{(\lambda)}$ в случая $0 < \lambda < \dfrac{1}{2}$.



Фигура 2.1

За така дефинираните пространства са доказани следните твърдения ($r = r_{Y_\lambda}$):

Теорема 2.2

$$d_2(Y_\lambda) = d\left(Y_\lambda, l_2^{(2)}\right) = \sqrt{2} + \left(1-\sqrt{2}\right)\lambda \ .$$

Теорема 2.3 $$\sup_{\sigma} \left(r''(\sigma) + r(\sigma) \right) r(\sigma) \; = \; \frac{\lambda^2 - 2\lambda + 2}{\lambda} \; .$$

Трябва да се отбележи, че sup не се достига, а е границата $\lim\limits_{\sigma \to \gamma -} \left(r''(\sigma) + r(\sigma) \right) r(\sigma)$, където $\gamma = \operatorname{arctg} \dfrac{1}{1-\lambda}$.

Като следствие се получава (използвано е означението $Q(\lambda) \; = \; \dfrac{\lambda^2 - 2\lambda + 2}{\lambda}$)

Следствие 2.6 $r \in G_{Q(\lambda)-1}$.

Теорема 2.4 $$\sup_{\sigma,\varphi} \frac{\sin^2(\sigma - \varphi)}{r^2(\varphi)} r(\sigma) \left(r(\sigma) + r''(\sigma) \right) \; = \; H(\lambda) \; .$$

Тук $H(\lambda) \; = \; \lambda^2 \sup\limits_{x \in A} M(x)$, където $A = \left\{ x \in S_{(\lambda)} \; : \; x_1 > 0 \,\&\, \dfrac{\pi}{4} \leq \operatorname{arctg} \dfrac{x_2}{x_1} \leq \gamma \right\}$.

Супремумът винаги се достига, като при $\lambda < \dfrac{-14 \left(1 + \sqrt{2} \right) + \sqrt{14 \left(57 + 40 \sqrt{2} \right)}}{7}$ е изпълнено $\sigma_{sup} > \dfrac{\pi}{4}$ и $\sigma_{sup} - \varphi_{sup} \neq \dfrac{\pi}{2}$, а за останалите стойности на $\lambda < 1$ имаме $\sigma_{sup} = \dfrac{\pi}{4}$ и $\sigma_{sup} - \varphi_{sup} = \dfrac{\pi}{2}$.

Като следствие се получава

Следствие 2.11 $r \in F_{H(\lambda)-1}$.

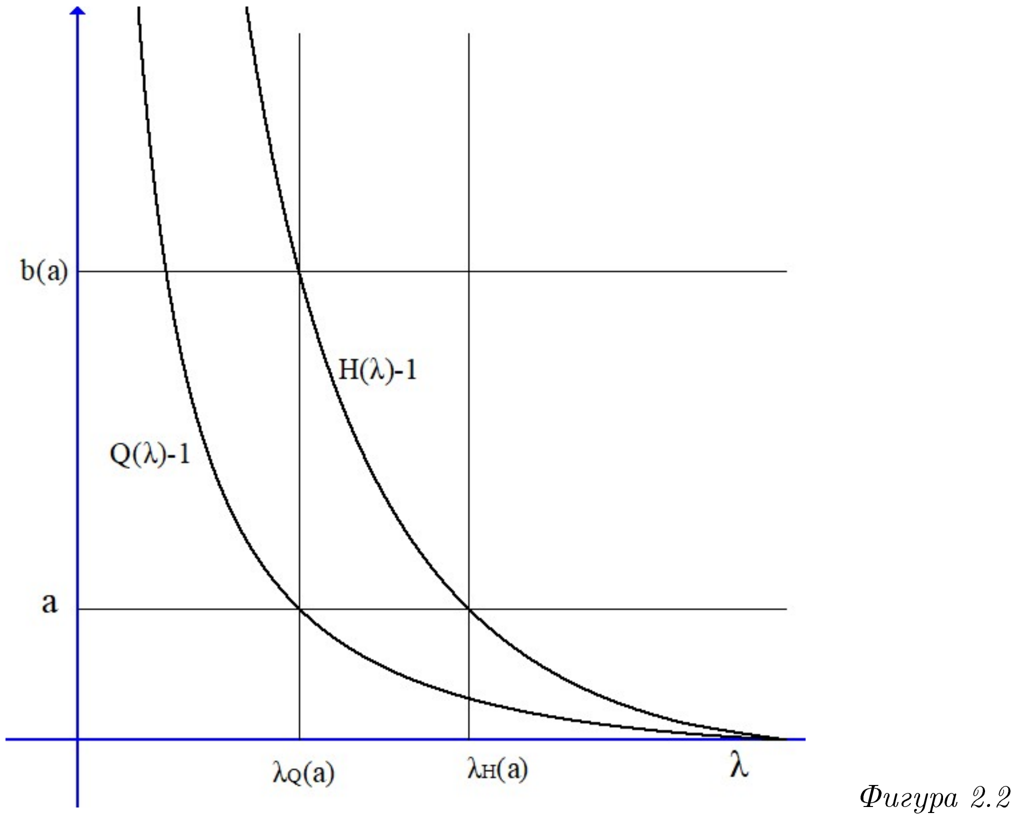
Получено е и асимтотичното поведение на ρ_{Y_λ} :

Теорема 2.5
$$\lim_{\tau \to 0} \frac{\rho_{Y_\lambda}(\tau)}{\tau^2} = \frac{1}{2} H(\lambda) \; .$$

Като следствие се получава

Следствие 2.12 $Y_\lambda \in \mathcal{X}_{H(\lambda)-1}$.

След подробно изучаване на функциите $Q(\lambda)$ и $H(\lambda)$ е получено доказателството на теорема 2.1 . Фигура 2.2 илюстрира доказателството.



Фигура 2.2

Получена е и оценка на разстоянието на Банах-Мазур между и .

Следствие 2.19 $d_2\left(X_a\right) \leq 1 + \dfrac{\left(\sqrt{2}-1\right)a}{a+\sqrt{2}}$ *с равенство за* $a \in \left[0,\ H(\lambda_2)-1\right]$.

Забележка: $H\left(\lambda_2\right) = \dfrac{\sqrt{7}+1}{3}$.

Глава 2

Във втора глава се изследват двумерни пространства от класа X_α , снабдено с нормата

$$\|(x_1,\, x_2)\|_{(\alpha)} := \sqrt{\left(\max\left\{|x_1|\, ,\, |x_2|\right\}\right)^2 + \alpha\left(\min\left\{|x_1|\, ,\, |x_2|\right\}\right)^2}\ .$$

Нормата в X_α е средно квадритична на нормите $\|x\|_2 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$ и $\|x\|_\infty = \max\left\{|x_1|\, ,\, |x_2|\right\}$ поради представянето

$$\|x\|_{(\alpha)} := \sqrt{\alpha\, \|x\|_2^2 + (1-\alpha)\, \|x\|_\infty^2}\ .$$

Тук $\alpha \in (0,\, 1]$ е фиксирано и по-нататък вместо $\|x\|_{(\alpha)}$ ще използваме $\|x\|$. Ясно е, че X_1 съвпада с $l_2^{(2)}$ (ако е необходимо, ще считаме, че $\alpha < 1$), а X_0 съвпада с $l_\infty^{(2)}$ – случай, който не разглеждаме.

За така дефинираните пространства са доказани следните твърдения:

Теорема 3.1 *В сила е:*

$$d\left(X_\alpha, l_2^{(2)}\right) = \sqrt{\frac{2}{1+\alpha}}\ .$$

Пряко следствие на 3.1 е:

Следствие 3.2

$$d_2\left(X_\alpha\right) = \sqrt{\frac{2}{1+\alpha}}\ .$$

Теорема 3.2

$$\delta_{X_\alpha}(\varepsilon) = 1 - \sqrt{1 - \frac{\alpha\,\varepsilon^2}{4}}$$

за всяко $0 < \varepsilon < \sqrt{2 - \sqrt{2}}$.

Като следствие от теорема3.2 получаваме основния резултат на тази глава.

Теорема 3.3 $D_p \geq \sqrt{\dfrac{2}{p}}$ *за всяко* $p \in (1, 2]$.

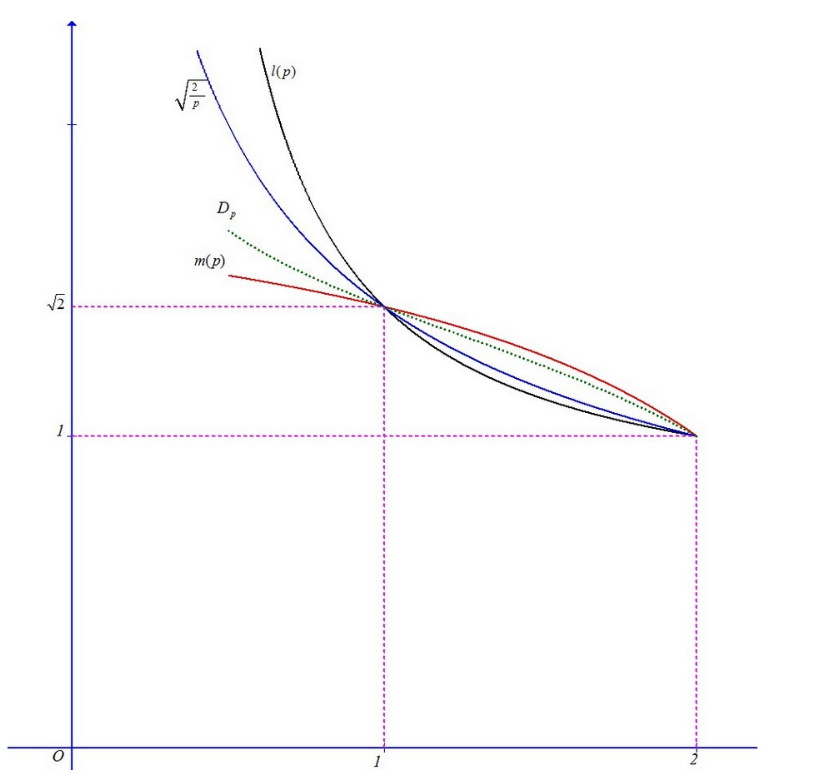
Тук $D_p := \sup\{d_2(X) \,:\, X \in \mathcal{Y}_p\}$, където $\mathcal{Y}_p$ е класа на всички Банахови пространства X , които удовлетворяват условието

$$\liminf_{\varepsilon\to 0} \frac{\delta_X(\varepsilon)}{\varepsilon^2} \geq \frac{p-1}{8} \; .$$

Доказателство: Полагаме $\alpha = p-1$. От теорема 3.2 получаваме

$\lim\limits_{\varepsilon\to 0} \dfrac{\delta_{X_\alpha}(\varepsilon)}{\varepsilon^2} = \dfrac{\alpha}{8} = \dfrac{p-1}{8}$, т.е. $X_\alpha \in \mathcal{Y}_p$.

Следователно, предвид следствие 3.2 , $D_p \geq d_2(X_\alpha) = \sqrt{\dfrac{2}{1+\alpha}} = \sqrt{\dfrac{2}{p}}$.



Фигура 3.1

Теорема 3.3 подобрява резултата на Иванов, Паралес и Троянски [5]. Фигура 3.1 илюстрира сравнението между оценките.

Литература

[1] Altshuler, Z., The modulus of convexity of Lorentz and Orlicz sequence spaces, in: Notes in Banach Spaces, Univ.of Texas Press, Austin, TX, 1980, 359-378.

[2] Figiel, T., On the moduli of convexity and smoothness, Studia Math. 56 (1976), 121-155.

[3] Hanner, O., On the uniform convexity of L^p and l^p , Arc.Mat. 3 (1956), 239-244

[4] Ivanov, M., S. Troyanski, Uniformly smooth renorming of Banach spaces with modulus of convexity of power type 2, J. Funct. Anal. 237, 2006, 373-390.

[5] Ivanov, M., A. J. Parales, S. Troyanski, On the geometry of Banach spaces with modulus of convexity of power type 2, Studia Mathematica 197 (1), 2010, 81–91.

[6] John, F., Extremum problems with inequalities as subsidary conditions, in: Studies and Essays Presented to R. Courant, Interscience, 1948, 187–204.

[7] Johnson W.B., J. Lindenstrauss, Basic concepts in the Geometry of Banach Spaces, in: Handbook of the Geometry of Banach Spaces, Vol. 1, Elsevier, 2001.

[8] Jordan, P., J. von Neumann, On inner products in linear, metric spaces, Ann. of Math. 36 (1935), 719-723.

[9] Kirchev, K., S. Troyanski, On some characterisations of spaces with scalar product, C. R. Acad. Bulgare Sci., 28, 1975, 445-447.

[10] Lindenstrauss, J., L. Tzafriri, Classical Banach Spaces. II: Function Spaces, Springer, 1979.

[11] Maleev, R., S. Troyanski, On the moduli of convexity and smoothness in Orlicz spaces, Studia Math. 54 (1975), 131-141.

[12] Meir, A., On the uniform convexity of L^p , $1 < p \leq 2$, Illinois J. Math. 28 (1984), 420-424

[13] Nordlander, G., The modulus of convexity in normed linear spaces, Ark. Mat. 4, 1960, 15-17.

[14] Rakov, S., Uniformly smooth renormings of uniformly convex Banach spaces, J. Soviet Math. 31, 1985, 2713-2721.

[15] Senechalle, D., Euclidean and non-Euclidean norms in a plane, Illinois J. Math., 15, 1971, 281-289.

[16] Nikolov, R., On a differential inequality, приета за печат вAnn. Sofia Univ., Fac. Math. and Inf., 104(2017)

[17] Nikolov, R., On a geometric characteristic of Banach spaces with modulus of convexity of power type 2, C.R.Acad.Bul.Sci., Tome 70, No. 9, 2017, p. 1189-1194

Авторска справка

Резултатите, постигнати в дисертацията, са:

- Изследвани са два класа двумерни пространства Y_λ , $0 < \lambda \leq 1$ и X_α , $0 < \alpha \leq 1$.
- Пресметната е харатеристиката $d_2(Y_\lambda)$, $d_2(X_\alpha)$.
- Намерено е асимтотичното поведение на модула на гладкост на Y_λ .
- Изследвани са критичните точки от единичната сфера на Y_λ .
- Намерена точна формула за модула на изпъкналост на X_α .
- Получена е нова, качествено по-добра от известните, оценка за D_p .

Декларация за оригиналност

Долуподписаният **Росен Асенов Николов**, декларирам, че дисертационния труд

„Оценки на разстоянието на Банах-Мазур чрез модули на изпъкналост и гладкост“

е изцяло мой авторски продукт и в неговото не са използвани чужди публикации и разработки в нарушение на авторските им права.

09 септември 2017 г. Росен Николов

Благодарности

Авторът благодари на всички членове на катедра „Математически анализ“ (настоящи и бивши) за моралната подкрепа при изготвянето на дисертацията.

Особено ценни бяха съветите на акад. Станимир Троянски, проф. дмн Румен Малеев, доц. д-р Милен Иванов.